Liveclass du 30/11 et 14/12 : Probabilités – Statistiques

Exercice 1 :

Un sac contient 20 boules ayant chacune la même probabilité d'être tirée. Ces 20 boules sont numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard dans le sac.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) Quelle est la probabilité de tirer la boule numérotée 13 ?

2) Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro pair ?

3) A-t-on plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4 ?

4) Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro qui soit un nombre premier ?

Correction :

1) $P\,(\text{« } 13 \text{ »}) = \frac{1}{20}$.

2) $P\,(\text{« } \textit{On obtient un nombre pair} \text{ »}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

3) Les multiples de 4 compris entre 1 et 20 sont : 4, 8, 12, 16 et 20. Donc $P\,(\text{« } \textit{On obtient un multiple de } 4 \text{ »}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

   Les diviseurs de 4 sont : 1, 2 et 4. Donc $P\,(\text{« } \textit{On obtient un diviseur de } 4 \text{ »}) = \frac{3}{20}$.

   Nous avons donc plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4.

4) Les nombres premiers compris entre 1 et 20 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. (Un nombre premier est un nombre supérieur ou égal à 2 qui possède uniquement deux diviseurs : 1 et lui-même).

   Donc $P\,(\text{« } \textit{On obtient un nombre premier} \text{ »}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Exercice 2 :

Une classe de $3^{ème}$ est constituée de 25 élèves. Certains sont externes, les autres sont demi-pensionnaires.
Le tableau ci-dessous donne la composition de la classe.

	Fille	Garçon	Total
Demi-pensionnaire	11	9	…
Externe	3	…	…
Total	…	…	25

1) Recopier et compléter le tableau.

2) On choisit au hasard un élève de cette classe.

   a) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit externe ?

   b) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille ?

   c) Si cet élève est demi-pensionnaire, quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Correction :

1)

	Fille	Garçon	Total
Demi-pensionnaire	11	9	20
Externe	3	2	5
Total	14	11	25

2) a) On considère l'évènement E : « l'élève est externe ».

$$P(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

   b) On considère l'évènement F : « l'élève est une fille ».

$$P(F) = \frac{14}{25}$$

   c) On considère l'évènement A : « l'élève demi-pensionnaire est un garçon ».

$$P(A) = \frac{9}{20}$$

<u>Exercice 3 :</u> Extrait CRPE 2020 G5

On s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 (un dé vert et un dé rouge). Le résultat de l'expérience est le plus grand des deux nombres sur les faces supérieures des dés.

Exemple : si le dé vert indique « 3 » sur sa face supérieure et le dé rouge indique « 5 », le résultat de l'expérience est 5.

Schématisons les résultats possibles selon les différents lancers par un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

1. Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit 2 est égale à $\frac{1}{12}$.

Notons X le résultat obtenu.
Pour obtenir 2 comme résultat il faudrait avoir obtenu l'un de ces 3 couples : (1 ; 2) ; (2 ; 1) ou (2 ; 2).

$$P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

2. Quelle est la probabilité que le résultat de l'expérience soit 6 ?

Pour obtenir 6 comme résultat il faudrait avoir obtenu l'un de ces couples :
(1 ; 6) ; (2 ; 6) ; (3 ; 6) ; (4 ; 6) ; (5 ; 6) ; (6 ; 6) ; (6 ; 5) ; (6 ; 4) ; (6 ; 3) ; (6 ; 2) ; (6 ; 1)

$$P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

3. Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal à 3 est égale à $\frac{1}{4}$.

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

La seule possibilité pour obtenir 1 comme résultat est : (1 ; 1)

Pour obtenir 3 : (1 ; 3) ; (3 ; 1) ; (2 ; 3) ; (3 ; 2) ou (3 ; 3)

$$P(X \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Ou tout simplement avec le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les issues possibles forment un carré de trois cases de côté. Il y a donc $3 \times 3 = 9$ issues.

$$P(X \leq 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

4. Monter que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal au nombre *n*, où *n* est un nombre entier compris entre 1 et 6, est égale à $\frac{n^2}{36}$.

En raisonnant comme précédemment nous remarquons que pour obtenir un nombre inférieur ou égal à n, l'ensemble des issues qui nous intéressent dessinent un carré de n cases. Il y a donc $n \times n = n^2$ issues.

$$P(X \leq n) = \frac{n^2}{36}$$

5. En déduire que la probabilité que le résultat de l'expérience soit le nombre *n*, où *n* est un nombre entier compris entre 1 et 6, est $\frac{2n-1}{36}$.

$$P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n - 1)$$

$$P(X = n) = \frac{n^2}{36} - \frac{(n-1)^2}{36} = \frac{n^2}{36} - \frac{n^2 - 2n + 1}{36}$$

$$P(X = n) = \frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{36} = \frac{2n - 1}{36}$$

<u>Exercice 4 :</u> Extrait CRPE 2018 G2

Les informations présentées dans cet exercice sont extraites du site de l'Établissement Français du Sang qui gère le don du sang en France (<u>https://www.dondusang.net/</u>).

Tableau 1 : Répartition de la population française selon le groupe sanguin et le rhésus

	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus -	6 %	7 %	1 %	1 %

Quel que soit le groupe ABO du donneur, son sang sera toujours très utile pour un malade.

DONNEURS \ RECEVEURS	O+	O-	A+	A-	B+	B-	AB+	AB-	
O+	💧		💧		💧		💧		
O-	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	DONNEUR UNIVERSEL
A+			💧				💧		
A-			💧	💧			💧	💧	
B+					💧		💧		
B-					💧	💧	💧	💧	
AB+							💧		
AB-							💧	💧	
							RECEVEUR UNIVERSEL		

Tableau 2 : Compatibilité sanguine des donneurs et des receveurs

Lecture : une personne de groupe A rhésus négatif (A-) peut recevoir du sang d'un donneur du groupe O rhésus négatif ou du groupe A rhésus négatif. Il peut donner son sang à des personnes des groupes et rhésus A+ ; A- ; AB+ et AB-.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « donneur universel » ?

Une personne dite « donneur universel » est une personne du groupe O -.

$$P(O\,-) = 0{,}06$$

2. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « receveur universel » ?

Une personne dite « receveur universel » est une personne du groupe AB +.

$$P(AB +) = 0,03$$

3. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française puisse donner son sang à une personne du groupe B, rhésus + ?

Pour donner son sang à une personne du groupe B + il faut être du groupe O + ; O - ; B + ou B -.

$$P(O +) + P(O -) + P(B +) + P(B -) = 0,36 + 0,06 + 0,09 + 0,01 = 0,52$$

4. On choisit au hasard une personne parmi les personnes du groupe O dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit « donneur universel » ? Arrondir le résultat au centième.

$$P_O(O -) = \frac{0,06}{0,42} = \frac{1}{7} \approx 0,14$$

Au 1er janvier 2016, d'après l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes. Parmi ces personnes, 43 217 325 personnes avaient entre 18 et 70 ans, critère requis pour pouvoir donner son sang.

5. Estimer le nombre de « donneurs universels » en France au 1er janvier 2016.

$$6\% \times 66\,627\,602 = \frac{6 \times 66\,627\,602}{100} = 3\,997\,656,12 \approx 3\,997\,656$$

Il y avait environ 3 997 656 « donneurs universels » en France au 1er janvier 2016.

6. Quel pourcentage de la population française représentait, au 1er janvier 2016, la population susceptible de donner son sang ?

$$\frac{43\,217\,325}{66\,627\,602} \times 100 \approx 64,86$$

La population susceptible de donner son sang, au 1er janvier 2016, représentait 64,86% de la population française.

Exercice 5 :

On a demandé à 50 élèves :
« Combien de temps travaillez-vous chaque soir ? »

Le tableau ci-dessous présente leur réponse :

Temps (min)	20	40	60	80
Effectif	6	24	14	6

1) Quel est le temps de travail moyen pour un élève ?

$$M = \frac{20 \times 6 + 40 \times 24 + 60 \times 14 + 80 \times 6}{50} = 48$$

En moyenne ces élèves ont travaillé 48 minutes par soir.

2) Quelle est la valeur médiane de cette série ?

Il y a 50 élèves interrogés, donc la médiane se situe entre le 25$^{\text{ème}}$ élève et le 26$^{\text{ème}}$.

$$Médiane = 40\ min$$

3) Quelle est l’étendue de la série ?

$$E = 80 - 20 = 60\ min$$

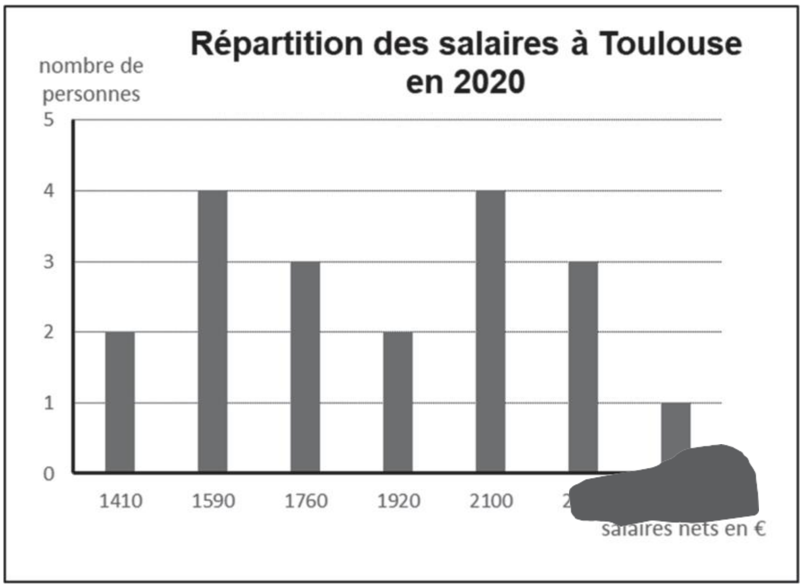
L’étendue de cette série est de 60 min.

<u>Exercice 6 :</u> Extrait CRPE 2021 G2

La cheffe d'une entreprise a commandé à son gestionnaire une étude sur les salaires de ses employés pour l'année 2020.
L'entreprise est installée sur deux sites :

- le site de Toulouse où travaillent 19 employés ;
- le site de Montauban où travaillent 12 employés.

La répartition des salaires nets des employés du site de Toulouse est représentée par le diagramme en barres ci-dessous, les salaires étant rangés dans l'ordre croissant.
Une tasse de café est renversée sur le document réalisé par le gestionnaire et une tache vient masquer certaines informations concernant le site de Toulouse.



Informations sur les salaires à Montauban en 2020 :

Salaire moyen : 1520 €
12 employés

Salaire maximum : 2300 €
Salaire minimum : 1410 €

1. La cheffe d'entreprise affirme que plus de 40 % des personnes travaillant à Toulouse gagnent plus de 2000 €. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.

   D'après le diagramme en barres on constate que 8 personnes gagnent plus de 2000€.
   $\frac{8}{19} \times 100 \approx 42$ Son affirmation est donc vraie.

2. Sur le site de Toulouse, l'étendue des salaires est égale à 1890 € et le salaire moyen est de 1935 €.

   a. Déterminer la valeur du plus haut salaire de Toulouse.

   $1\,410 + 1\,890 = 3\,300$ Le salaire le plus haut à Toulouse est de 3 300€.

b. Déterminer la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique présentant la répartition des salaires à Toulouse en 2020.

On sait que le salaire moyen à Toulouse est de 1 935€, notons x la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique. On a :

$$\frac{2\times 1410+4\times 1590+3\times 1760+2\times 1920+4\times 2100+3\times x+1\times 3300}{19}=1\,935$$

$$\frac{2\,820+6\,360+5\,280+3\,840+8\,400+3x+3\,300}{19}=1\,935$$

$$30\,000+3x=1\,935\times 19$$

$$30\,000+3x=36\,765$$

$$3x=36\,765-30\,000$$

$$3x=6\,765$$

$$x=\frac{6\,765}{3}=2\,255$$

Ce salaire est de 2 255 €

3. Déterminer le salaire médian des employés de Toulouse.

Nous avons 19 employés, donc le salaire médian se situe à la 10$^{\text{ème}}$ valeur soit 1 920€.

4. Calculer le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel de cette entreprise. Arrondirà l'unité.

$$M=\frac{1\,935\times 19+1\,520\times 12}{31}\approx 1\,774$$

Le salaire moyen en 2020 de cette entreprise est d'environ 1 774€.

5. En 2021, la cheffe d'entreprise souhaiterait octroyer une augmentation de 10 % à tous les employés travaillant à Montauban.

a. Quel sera alors le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 ?

Augmenter un nombre de 10% revient à multiplier ce nombre par : 1 + 10% = 1,1.

$1\,410 \times 1{,}1 = 1\,551$. Le salaire minimum à Montauban en 2021 sera de 1 551€.

b. De quel pourcentage aurait-il fallu augmenter les salaires de Montauban pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites ? Justifier. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

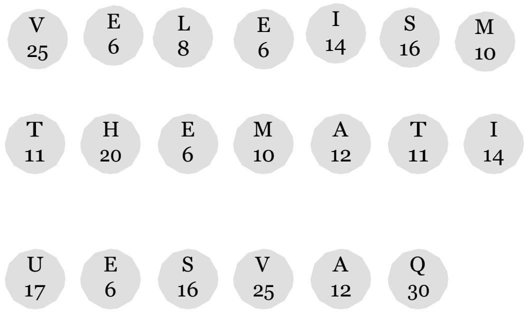
$$1\,520 \times x = 1\,935$$

$$x = \frac{1\,935}{1\,520} \approx 1{,}273 \qquad 1{,}273 = 1 + 0{,}273 = 1 + 27{,}3\%$$

Il aurait fallu augmenter les salaires de Montauban d'environ 27,3% pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites.

Exercice 7 : Extrait CRPE 2020 G6

Dans une urne, on place les boules suivantes : sur chaque boule sont écrits une lettre et un nombre.



1. On considère la série statistique composée des nombres écrits sur les boules placées dans l'urne. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série.

- $E = 30 - 6 = 24$ L'étendue est de 24.

- Pour trouver la médiane commençons par ranger les nombres dans l'ordre croissant :

6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 8 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 14 ; 14 ; 16 ; 16 ; 17 ; 20 ; 25 ; 25 ; 30

Étant donné que nous avons 20 nombres la médiane se situe entre la 10ème et la 11ème valeur, soit :

$$Médiane = \frac{12 + 12}{2} = 12$$

- $M = \frac{6+6+6+\cdots+25+30}{20} = 13{,}75$ La moyenne est de 13,75.

2. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.

(a) Montrer que la probabilité de tirer un nombre pair est $\frac{3}{4}$.

Notons A l'évènement : « obtenir un nombre pair ».

Il y a 15 nombres pairs parmi les 20 nombres sur les boules.

On a donc $P(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

(b) Calculer la probabilité de tirer une voyelle ou un nombre pair.

Notons B l'évènement : « obtenir une voyelle ou un nombre pair ».

Il y a 15 nombres pairs et parmi les nombres impairs il y a 1 voyelle.

On a donc $P(B) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

(c) Calculer la probabilité de tirer une voyelle et un nombre pair.

Notons C l'évènement : « obtenir une voyelle et un nombre pair ».

Il y a 8 boules ayant une voyelle et un nombre pair.

On a donc $P(C) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

3. On tire successivement et sans remise 5 boules. On obtient après les quatre premiers tirages les lettres M, A, T, H. Quelle est la probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot M A T H S ?

Si nous avons déjà tiré 4 boules il en reste donc 16. Il reste deux S parmi les 16 boules restantes.

$P(S) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0{,}125$